量子力学A期末試験（問題用紙）2019/08/05　学生番号　　　　　氏名

（注）この問題用紙にも氏名を書きなさい（持ち帰る事）**。ただし、解答は解答用紙に書き提出する事。**
求め方や理由を要求している問題以外は結果のみでよい（途中を書いても加点されない）**。**
問題中にあらわれる特に指定のない「記号」や「演算子」は講義で使用しているものと同じである。
必要ならば、下の参考式(1)-(4) を使って良い。

参考式 (1) 演算子$\hat{A},\hat{B}$ の間の不確定性関係は $<(\Delta\hat{A})^2><(\Delta\hat{B})^2> \geq \frac{1}{4}|<[\hat{A},\hat{B}]>|^2$

参考式 (2) 消滅・生成演算子の定義　$\hat{a} \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x}+\frac{i\hat{p}}{m\omega}\right)$ ， $\hat{a}^\dagger \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x}-\frac{i\hat{p}}{m\omega}\right)$

参考式 (3) 調和振動子において、　$\hat{a}|n> = \sqrt{n}|n-1>$ 、$\hat{a}^\dagger|n> = \sqrt{n+1}|n+1>$ が成り立つ

参考式 (4) 球面調和関数 $Y_1^m(\theta,\phi)$ $(l=1,\ m=-1,\ 0,\ +1)$　[$\hat{L}^2$, $\hat{L}_z$ の極座標表示での固有関数を表す]

$$\begin{cases} Y_1^{-1}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\phi} \\ Y_1^0(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \\ Y_1^1(\theta,\phi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\phi} \end{cases}$$

―――――――――――――　ここから問題文が始まる　―――――――――――――

[1] 次の交換関係の値を求めよ.

(1) $[\hat{x},\hat{p}_x]$、(2) $[\hat{x},\hat{p_x^2}]$、(3) $[\hat{L}_x,\hat{L}_y]$、(4) $[\hat{L}_x,\hat{L_y^2}]$　**（結果のみ記せ）**

[2] 1次元調和振動子（ポテンシャルは $V(x)=\frac{1}{2}m\omega^2x^2$ とする）について以下の質問に答えよ。

（注意）(5)以外は結果のみ書け

(1) 固有状態$|n>$ のエネルギー固有値 E_n を $n,\hbar,\omega$ で表せ（基底状態は$n=0$である事に注意）

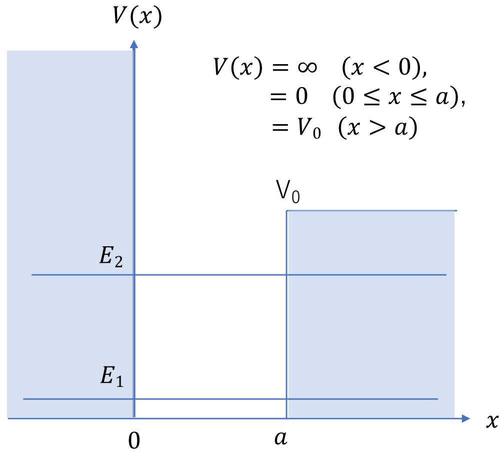
(2) $\hat{x},\hat{p}$ を $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ で表せ。

(3)$|n>$ での期待値 $<\hat{x}>_n = <n|\hat{x}|n>$, $<\hat{p}>_n = <n|\hat{p}|n>$ の値を求めよ。

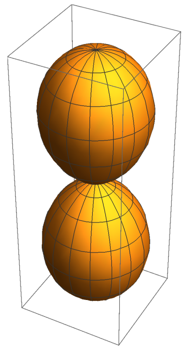
(4)$|n>$ での期待値 $<\hat{x}^2>_n = <n|\hat{x}^2|n>$, $<\hat{p}^2>_n = <n|\hat{p}^2|n>$ の値を求めよ。

(5) 固有状態$|n>$ で $<(\Delta\hat{x})^2>_n <(\Delta\hat{p})^2>_n$ を求め不確定性関係が成り立っていることを示せ。**<求め方も書きなさい>。**

[3] 右図の１次元ポテンシャル$V(x)$で、「基底状態 E_1」と「第１励起状態 E_2」の波動関数$\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ をスケッチせよ。（ただし、束縛状態は２つ以上存在するものとする）



[4] 右図はp軌道の球面調和関数の２乗 $|Y_1^m(\theta,\phi)|^2 (l=1)$ を表したものである。（ただし、図で縦方向はz方向、水平面はxy平面である。また、図は原点（図の中心）からの距離が$|Y_1^m(\theta,\phi)|^2$になるように書いてある。）



(1) $m = -1, 0, +1$ のうち、どの m に対応した図か？

(2) 古典力学では、(1)の場合、粒子はどのような運動をしているか述べよ。

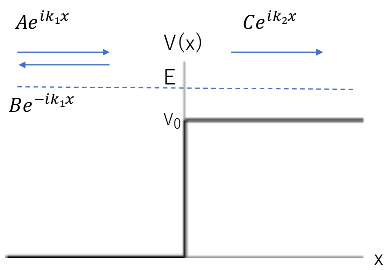
[5] 水素原子について以下の問いに答えよ<u>**（結果のみ書け**</u>）。

(1) 3d 軌道に対する主量子数 n、方位量子数 ℓ、磁気量子数 m の取り得る値をすべて書け。

(2) 4f 軌道の縮退の数は全部でいくつになるか。

[6] 右図のような階段型ポテンシャル $V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & x \geq 0 \end{cases}$ において、<u>粒子が$-\infty$ から $E > V_0$</u>のエネルギーでやってくる時、以下の問いに答えよ。

<u>**（すべて途中計算は不要。結果のみ書け**</u>）



(1) $x < 0$ の波動関数 $\varphi_1(x) = A e^{ik_1 x} + B e^{-ik_1 x}$ と $x \geq 0$ の波動関数 $\varphi_2(x) = C e^{ik_2 x}$ の接続条件より、 $\dfrac{B}{A}$, $\dfrac{C}{A}$ を k_1, k_2 で表せ。ただし、$k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$、$k_2 = \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar$

(2) 古典力学では<u>$E > V_0$</u> なので反射する粒子は無い（$R = 0$）。しかし、量子力学では$R > 0$ となる。実際に、反射率 R （$\equiv \dfrac{|B|^2}{|A|^2}$）を k_1, k_2 で求めよ。